1.1.8. Integrali uslova ravnoteže elementa štapa i izrazi za sile u presjecima

Vidjeli smo da uslovi ravnoteže elementa štapa predstavljaju sistem od 3 linearne diferencijalne jednačine prvog reda sa nepoznatim silama N, T i M. Direktnom integracijom tih jednačina od i do c posmatranog štapa ik dobija se:

$$\begin{aligned} N_c &= N_i - \int_i^c p_x dx \\ T_c &= T_i - \int_i^c p_y dx \\ M_c &= M_i + \int_i^c T dx \end{aligned} \qquad (12)$$

Primjenom parcijalne integracije dobijamao:

$$\int_i^c T dx = Tx\,/_i^{\,c} - \int_i^c x dT = T_c x_c - T_i x_i - \int_i^c x dT$$

Promjena transverzalne sile se može napisati kao $dT=-p_y dx$ i dobija se da je

$$\int_i^c T dx = T_c x_c - T_i x_i + \int_i^c x p_y dx$$

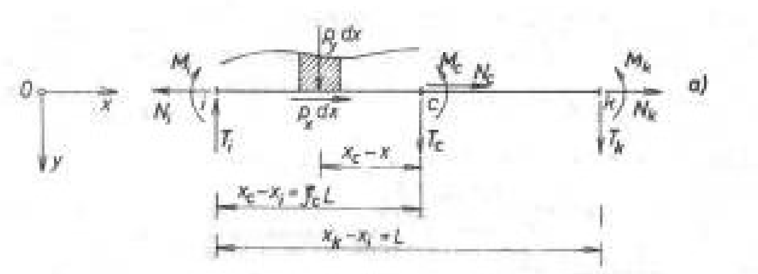
Ako u ovaj izraz ubacimo vezu koja se dobija kada se relacija 12b pomnoži sa x_c slijedi da je:

$$\int_i^c T dx = T_i (x_c - x_i) - \int_i^c p_y (x_c - x) dx$$

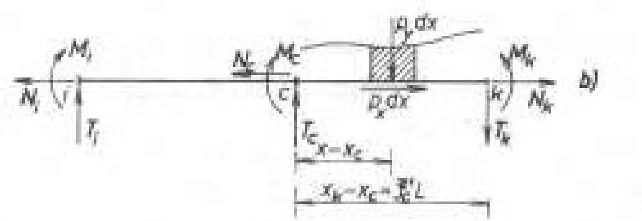
Sada se sistem jednačina (12) može napisati u sljedećem obliku:

$$\begin{aligned} N_c &= N_i - \int_i^c p_x dx \\ T_c &= T_i - \int_i^c p_y dx \\ M_c &= M_i + T_i (x_c - x_i) - \int_i^c (x_c - x) p_y dx \end{aligned} \qquad (13)$$

Jednačine (13) predstavljaju integrale uslova ravnoteže elementa štapa, odnosno, *uslove ravnoteže svih sila na konačnom dijelu štapa od i do c* (slika 14.).



Slika 14.



Slika 15.

Sličnim postupkom možemo izvesti izraze za sile u presjeku c integracijom uslova ravnoteže elementa štapa od c do k (slika 15.):

$$N_c = N_k + \int_c^k p_x dx$$

$$T_c = T_k + \int_c^k p_y dx \tag{14}$$

$$M_c = M_k - T_k(x_k - x_c) - \int_i^c (x - x_c) p_y dx$$

Na osnovu jednačina (13) i (14) može se iskazati sljedeće:

- *Normalna sila Nc u presjeku c štapa ik jednaka je algebarskom zbiru komponenata svih spoljašnjih sila koje djeluju na štap lijevo ili desno od posmatranog presjeka, a u pravcu ose štapa.*
- *transverzalna sila Tc u presjeku c štapa ik jednaka je algebarskom zbiru komponenata svih spoljašnjih sila koje djeluju na štap lijevo ili desno od posmatranog presjeka, a u pravcu upravnom na osu štapa.*
- *Moment savijanja Mc u presjeku c štapa ik jednaka je algebarskom zbiru momenata svih spoljašnjih sila koje djeluju na štap lijevo ili desno od posmatranog presjeka, a u odnosu na težište tog presjeka.*

Kada je štap neopterećen duž ose štapa tada je px=py=0, pa sile u presjeku c zavise samo od sila na krajevima štapa i, odnosno, k:

$$N_c = N_i = N_k$$

$$T_c = T_i = T_k$$

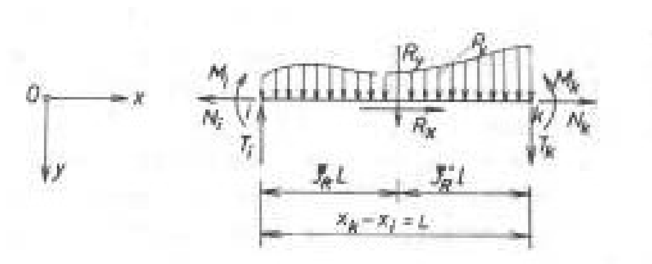
$$M_c = M_i + T_i(x_c - x_i) = M_k - T_k(x_k - x_c)$$

Iz jednačina 13 i 14 primjećuje se da se sile u proizvoljnom presjeku štapa mogu odrediti ako su pored zadatog opterećenja px i py poznate i sile na jednom ili na drugom kraju štapa, ili bilo koje tri veličine X_1, X_2 i X_3 iz kojih se sile na krajevima štapa mogu izračunati.

Veličine Xi, i=1,2,3 mogu biti komponente sila u određenim poprečnim presjecima ili linearne funkcije ovih komponenata, a najpogodnije je izabrati da su sile na krajevima štapova:

$X_1=X_1(N_i, T_i, M_i, N_k, T_k, M_k)$
$X_2=X_2(N_i, T_i, M_i, N_k, T_k, M_k)$
$X_3=X_3(N_i, T_i, M_i, N_k, T_k, M_k)$

Sile na krajevima štapa i –k nijesu međusobno nezavisne već moraju zadovoljiti uslove ravnoteže štapa kao cjeline:



Slika 16.

$$N_k - N_i + R_x = 0$$

$$T_k - T_i + R_y = 0 \qquad (15)$$

$M_k - M_i - T_i L + R_y \xi'_R L = 0$ ili $M_k - M_i - T_k L + R_y \xi_R L = 0$

gdje su :

$$R_x = \int_i^k p_x dx, \qquad R_y = \int_i^k p_y dx,$$

$$R_y \xi'_R L = \int_i^k (x_k - x) p_y dx, \qquad R_y \xi_R L = \int_i^k (x - x_i) p_y dx,$$

$\xi'_R L$ i $\xi_R L$ –odstojanje rezultante opterećenja od kraja k , odnosno, kraja i.

Tri definisane veze sila Xi (i=1,2,3) zajedno sa tri uslova ravnoteže štapa kao cjeline predstavljaju sistem od 6 linearnih algebarskih jednačina sa 6 nepoznatih sila na krajevima štapa N_i, T_i, M_i, N_k, T_k, M_k. Kada si funkcije Xi međusobno nezavisne i nezavisne od uslova ravnoteže tada se ovaj sistem može riješiti. Veličine X_i (i=1,2,3) se nazivaju *statički nezavisne veličine štapa ili statični neodređene veličine.*
Najpogodnije je izabrati da ove veličine budu:

$X_1 = M_i$, $X_2 = M_k$, $X_3 = S_{ik} = (N_i + N_k)/2$

Preostale sile se određuju iz uslova ravnoteže štapa.
Iz Σx slijedi: $N_i - N_k = R_x$
$N_i + N_k = 2S_{ik}$
Ako riješimo ove jednačine dobija se:

$N_i = S_{ik} + R_x/2$ i $N_k = S_{ik} - R_x/2$

Iz relacija 15c dobija se:

$$T_i = R_y \xi_R' + \frac{M_k - M_i}{L}$$

$$T_k = -R_y \xi_R + \frac{M_k - M_i}{L}$$

Kada su određene sile na krajevima Ni, Nk, Ti i Tk onda se sile u proizvoljnom poprečnom presjeku c dobijaju na sljedeći način:

$$N_c = S_{ik} + N_{c,o}$$

$$T_c = \frac{M_k - M_i}{L} + T_{c,o}$$

$$M_c = M_i \xi_c' + M_k \xi_c + M_{c,o}$$

gdje veličine N_{co}, T_{co} i M_{co} zavise od zadatih sila p_x i p_y i njihovih rezultanti:

$$N_{c,o} = \frac{R_x}{2} - \int_i^c p_x dx$$

$$T_{c,o} = R_y \xi_R' - \int_i^c p_y dx$$

$$M_{c,o} = R_y \xi_R' (x_c - x_i) - \int_i^c (x_c - x) p_y dx$$

I ako je jednostavno prikazati sile u presjecima primjenom analitičkih izraza, mnogo češće promjenu sila prikazujemo graficima koji se u Statici konstrukcija nazivaju *dijagrami presječnih sila Ili dijagrami sila u presjecima*.

Kako smo i prikazali analitičkim izrazima i dijagrami presječnih sila se sastoje iz dva dijela:

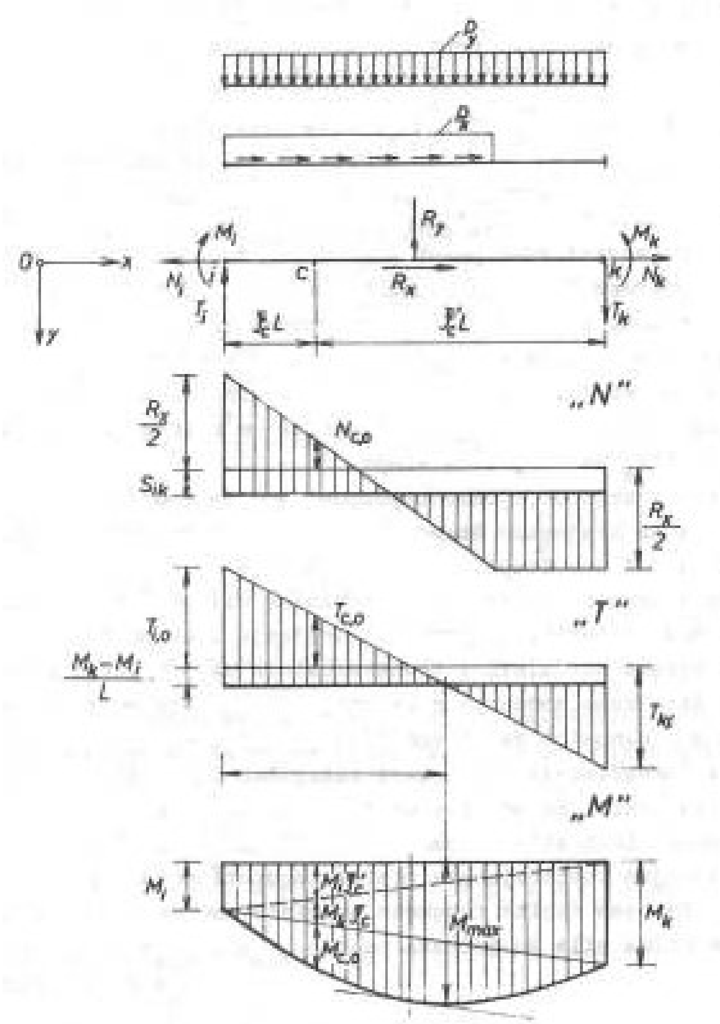
- dijela koji zavisi od sila raspodijeljenih po dužini ose štapa
- dijela koji zavisi od sila na krajevima.

Oblici dijagrama sila u presjecima zavise od raspodjele opterećenja po dužini štapa.

Izrazi za normalnu i transverzalnu silu koji zavise od sila na krajevima predstavljaju konstante i njihov dijagram ima oblik pravougaonika, dok momenti imaju linearnu zavisnost duž ose štapa (slika 17.).

Kada crtamo dijagrame jednostavno superponiramo dijagrame od sila na krajevima štapa i dijagram koji potiče od opterećenja na štapu.

Pri iscrtavanju dijagrama presječnih sila pozitivne normalne i transverzalne sile nanosimo na "gornju" stranu štapa i redovno upisujemo znak, dok pri iscrtavanju dijagrama momenata, momente nanosimo na onu stranu štapa koja je zategnuta i ne upisujemo znak.



Slika 17.

Iz izvedenih jednačina se vidi da je grafik transverzalne sile funkcija prvog izvoda funkcije momenata savijanja, odnosno, promjena ugla nagiba tangente na liniju dijagrama momenata. Ako je ugao nagiba tangente nula i transverzalna sila je nula.

1.1.9. Integrali deformacijskih jednačina i izrazi za pomjeranja i obrtanja

Kada su sračunate sile u presjecima N, T i M i kada su poznate temperaturne promjene t i Δt, deformacijske veličine se određuju iz sljedećih izraza:

$$\varepsilon = \frac{N}{EF} + \alpha_t t$$
$$\chi = \frac{M}{EI} + \alpha_t \frac{\Delta t}{h} \qquad (16)$$
$$\varphi_t = \frac{kT}{GF}$$

Obrtanje elementa ose pravog štapa φ i obrtanje poprečnog presjeka φ-φ_T , kao i pomjeranje u i v određujemo integracijom jednačina:

$$d(\varphi-\varphi_t)= -\chi\, dx$$
$$du= \varepsilon\, dx$$
$$dv= \varphi\, dx$$

Nakon ntegracije od i do c dobija se:

$$(\varphi-\varphi_T)_c-(\varphi-\varphi_T)_i=-\int_i^c \chi dx$$

$$u_c-u_i=\int_i^c \varepsilon\, dx \tag{17}$$

$$v_c-v_i=\int_i^c \varphi\, dx-\int_i^c \varphi_T dx+\int_i^c \varphi_T dx=\int_i^c \varphi_T dx+\int_i^c (\varphi-\varphi_T)dx$$

Iz 17c primjenom parcijalne integracije dobija se:

$$\int_I^C (\varphi-\varphi_T)dx=x(\varphi-\varphi_T)/_i^c - \int_i^c x\, d(\varphi-\varphi_T)$$

$$\int_i^c (\varphi-\varphi_T)dx=x_c(\varphi-\varphi_T)_c-x_i(\varphi-\varphi_T)_i+\int_i^c x\chi dx$$

Jednakost 17a pomnožimo sa x_c:

$$x_c(\varphi-\varphi_T)_c=x_c(\varphi-\varphi_T)_i-\int_i^c x_c\chi dx$$

uvrstimo u prethodnu jednačinu:

$$\int_i^c (\varphi-\varphi_T)dx=(\varphi-\varphi_T)_i(x_c-x_i)-\int_i^c (x_c-x)\chi dx$$

Sada jednačine 17 dobijaju sljedeći oblik:

$$(\varphi-\varphi_T)_c=(\varphi-\varphi_T)_i-\int_i^c \chi dx$$

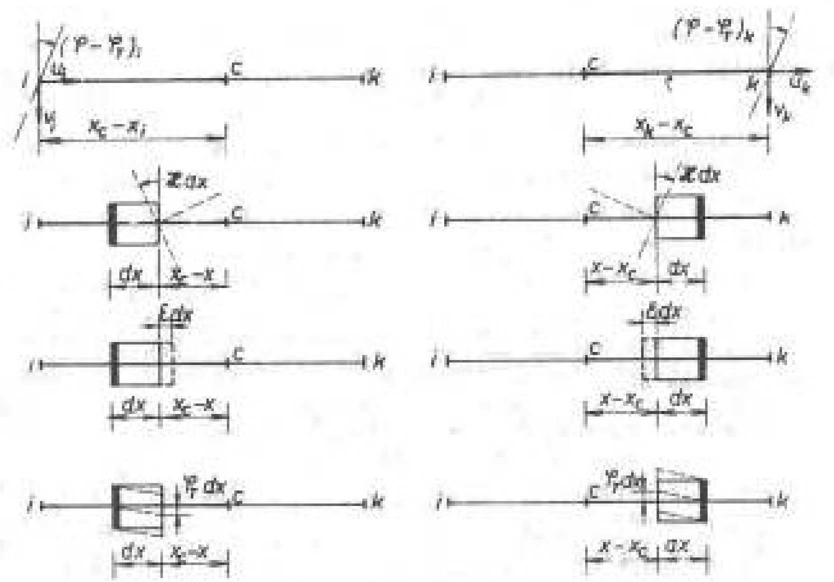
$$u_c=u_i+\int_i^c \varepsilon\, dx \tag{18}$$

$$v_c=v_i+(x_c-x_i)(\varphi-\varphi_T)_i-\int_i^c [(x_c-x)\chi-\varphi_T]dx$$

Ove relacije daju vezu između pomjeranja i obrtanja presjeka c preko pomjeranja i obrtanja kraja i i deformacije štapa.

Ove jednačine imaju jednostavna geometrijska značenja. One određuju *obrtanje presjeka i pomjeranja tačaka ose štapa kada su poznate deformacijske veličine i pomjeranja i obrtanja lijevog kraja štapa*.

Kada su poznate sile N, T , M, t, Δt tada deformacijske veličine χdx, εdx, $\varphi_T dx$ određujemo iz veza 16. To su veličine koje određuju deformaciju elementa štapa u malom (vidi sliku 18):



Slika 18.

Uticaji ovih deformacija na obrtanje presjeka c predstavljaju podintegralne funkcije jednačina (18). Kada te uticaje saberemo od i do c i dodamo pomjeranjima na kraju i dobijamo izraze (18). Slično, kada te uticaje saberemo od c do k , tada dobijamo sljedeće izraze za pomjeranja i obrtanja presjeka c:

$$(\varphi - \varphi_T)_c = (\varphi - \varphi_T)_k + \int_c^k \chi dx$$

$$u_c = u_k - \int_c^k \varepsilon \, dx \tag{19}$$

$$v_c = v_k - (x_k - x_c)(\varphi - \varphi_T)_k - \int_c^k [(x - x_c)\chi - \varphi_T] dx$$

Kada se štap ne deformiše, veličine χ, ε, φ_T identički su jednake nuli pa jednačine 18 i 19 postaju:

$\varphi_c^l = \varphi_i$, $\varphi_c^d = \varphi_k$
$u_c^l = u_i$, $u_c^d = u_k$
$v_c^l = v_i + (x_c - x_i)\, \varphi_i$, $v_c^d = v_d - (x_k - x_c)\, \varphi_k$

Ovi izrazi nam pokazuju da pomjeranja i obrtanja presjeka c bilo da ih računamo sa lijeve ili desne strane određuju onaj dio pomjeranja štapa koji potiče od pomjeranja štapa kao krute ploče u ravni.
Znači kada znamo deformacijske veličine presjeka štapa χ, ε, φ_T i pomjeranja i obrtanja kraja i , odnosno k, u_i, v_i, φ_i, u_k, v_k, φ_k, možemo odrediti pomjeranja i obrtanja u bilo kom presjeku štapa. Veličine u_i, v_i, φ_i i u_k, v_k, φ_k određuju pomjeranja štapa kao krute ploče u ravni.
Međutim, umjesto pomjeranja i obrtanja krajeva, mogu da budu zadate tri veličine koje određuju pomjeranja štapa kao krute ploče u ravni. Te veličine, koje obeležavamo sa U_1, U_2, U_3 zovu se *deformacijski nezavisne veličine štapa* , i mogu biti pomjeranja ili obrtanja kraja i ili kraja k, ili linearne funkcije tih veličina:

$$U_j = U_j\,(u_i, v_i, \varphi_i, u_k, v_k, \varphi_k)\quad,\quad j=1,2,3$$

Opšti izrazi za pomjeranja tačaka i obrtanja presjeka mogu da se napišu na sljedeći način:

$$(\varphi - \varphi_T)_c = (\varphi - \varphi_T)_{c,o} + U_1\,\varphi_{c,1} + U_2\,\varphi_{c,2} + U_3\,\varphi_{c,3}$$

$$u_c = u_{c,o} + U_1\,u_{c,1} + U_2\,u_{c,2} + U_3\,u_{c,3}$$

$$v_c = v_{c,o} + U_1\,v_{c,1} + U_2\,v_{c,2} + U_3\,v_{c,3}$$

$(\varphi - \varphi_T)_{c,o}$, $u_{c,o}$, $v_{c,o}$ – obrtanja presjeka i pomjeranja tačaka ose štapa usljed dejstva spoljašnjih uticaja kada su $U_1= U_2= U_3 =0$, odnosno pri *stanju $U_j=0$*

$u_{c,j}$, $v_{c,j}$, $\varphi_{c,j}$, j=1,2,3 – predstavljaju obrtanja presjeka i pomjeranja tačaka ose ose štapa kada se štap pomjera kao kruta ploča u ravni kada je jedna od $U_j=1$ a ostale dvije veličine U su nula. Stanja pomjeranja štapa kratko ćemo zvati *stanje $U_1= 1$, stanje $U_2=1$ i stanje $U_3=1$*

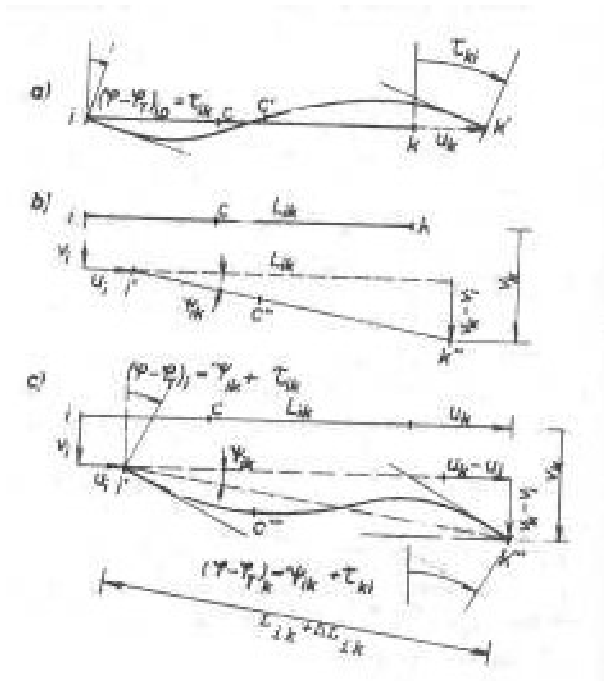
Ako usvojimo da su:

$U_1=u_i$, $U_2=v_i$, $U_2=v_k$

Obrtanja presjeka $(\varphi - \varphi_T)_c^I$ i pomjeranja u_c^I i v_c^I usled deformacijski neodređenih veličina U_1, U_2, U_3 dobijamo polazeći od izraza za obrtanja i pomjeranja štapa kao krute ploče u ravni (slika 19b):

$$\begin{aligned}(\varphi - \varphi_T)_c^I &= \psi_{ik}\\ u_c^I &= u_i\\ v_c^I &= v_i + \xi_c\,L_{ik}\,\psi_{ik}\end{aligned}\tag{20}$$

u_i , v_i – translacija ploče za veličinu pomjeranja tačke i,
ψ_{ik} – rotacija ploče oko te tačke.



Slika 19.

Kada u prethodne relacije ubacimo da je ξ_c=1 pomjeranje $v_c^I = v_k$ dobijamo:

$$v_k = v_i + L_{ik}\,\psi_{ik}$$
$$\psi_{ik} = \frac{v_k - v_i}{L_{ik}}$$

Ova relacija se može izvesti i sa slike 19:

$$\sin\psi_{ik} = \frac{v_k - v_i}{L_{ik} + \Delta L_{ik}}$$

Kako su u teoriji malih deformacija veličine ψ_{ik}, ΔL_{ik}, v_i, v_k toliko male da im se kvadrati mogu zanemariti, slijedi:

$$\sin\psi_{ik} \cong \psi_{ik} = \frac{v_k - v_u}{L_{ik} + \Delta L_{ik}} \cong \frac{v_k - v_i}{L_{ik}}\left(1 - \frac{\Delta L_{ik}}{L_{ik}}\right) \cong \frac{v_k - v_i}{L_{ik}}$$

ψ_{ik} – ugao obrtanja tetive štapa

Kada izraz za obrtanje tetive štapa ubacimo u relacije (20) dobija se:

$$(\varphi - \varphi_T)_c^I = (v_k - v_i)/L_{ik}$$
$$u_c^I = u_i$$
$$v_c^I = v_i\,\xi_c' + v_k\,\xi_c$$

Kada ovim vrijednostima dodamo obrtanja i pomjeranja koja nastaju pri stanju U_j=0 tada dobijamo ukupna pomjeranja:

$$(\varphi-\varphi_T)_c=\frac{v_k-v_i}{L_{ik}}+(\varphi-\varphi_T)_{c,o}$$
$$u_c=u_i+u_{c,o}$$
$$v_c=v_i\xi_c'+v_k\xi_c+v_{c,o}$$

Za određivanje članova $(\varphi - \varphi_T)_{c,o}$, $u_{c,o}$ i $v_{c,o}$ koriste se relacije (18) i dobija se:

$$\begin{aligned}
(\varphi-\varphi_T)_{c,o}&=\tau_{ik}-\int_i^c\chi dx=\tau_{ki}+\int_c^k\chi dx\\
u_{c,o}&=\int_i^c\varepsilon dx=\Delta L_{ik}-\int_c^k\varepsilon dx\\
v_{c,o}&=\xi_c L_{ik}\tau_{ik}-\int_i^c[(x_c-x)\chi-\varphi_T]dx=-\xi_c' L_{ik}\tau_{ik}-\int_c^k[(x-x_c)\chi+\varphi_T]dx
\end{aligned} \tag{21}$$

pri čemu su uvedene sljedeće oznake za veze:

$$\begin{aligned}
\Delta L_{ik}&=u_k-u_i\\
\tau_{ik}&=(\varphi-\varphi_T)_i-\psi_{ik}=(\varphi-\varphi_T)_i-\frac{v_k-v_i}{L_{ik}}\\
\tau_{ki}&=(\varphi-\varphi_T)_k-\psi_{ik}=(\varphi-\varphi_T)_k-\frac{v_k-v_i}{L_{ik}}
\end{aligned} \tag{22}$$

koje predstavljaju deformacijske veličine štapa kao cjeline date preko pomjeranja i obrtanja krajeva štapa.
Veličine ΔL_{ik}, τ_{ik} i τ_{ki} imaju jednostavno fizičko značenje (slika 19):

$l'_{ik}\cos\psi_{ik} + u_i = l_{ik}+u_k$
$\cos\psi_{ik}\cong 1$
$l_{ik}+\Delta L_{ik} + u_i = l_{ik}+u_k$
$\Delta L_{ik} = u_k- u_i$ promjena dužine tetive štapa

Razlika ugla obrtanja na kraju i i obrtanja tetive štapa i-k je deformacioni ugao na kraju i štapa i-k i označava se sa τ_{ik}:

$\tau_{ik} = (\varphi-\varphi_T)_i - \psi_{ik}$

τ_{ki} predstavlja deformacioni ugao na kraju k štapa i-k.
ΔL_{ik}, τ_{ik} i τ_{ki} su čiste deformacijske veličine i jednake su nuli kada se štap ne deformiše.

Ove veličine možemo prikazati i preko deformacijskih veličina elementa štapa χ, ε i φ_T, kad u (21) tačku c izjednačimo sa i:

$$\tau_{ik} = \frac{1}{L_{ik}} \int_i^k (\xi' L_{ik} \chi - \varphi_T) dx$$

$$\tau_{ki} = -\frac{1}{L_{ik}} \int_i^k (\xi L_{ik} \chi + \varphi_T) dx \qquad (23)$$

$$\Delta L_{ik} = \int_i^k \varepsilon dx$$

1.1.10. Veze statički nezavisnih veličina i deformacijskih veličina štapa

Da bi odredili statičke veličine u proizvoljnom presjeku štapa potrebno je znati opterećenje p_x, p_y i i tri nezavisne satičke veličine Xi (i=1,2,3).
Da bi odredili pomjeranja i obrtanja poprečnih presjeka treba poznavati presječne sile N, T i M, t i Δt i tri deformacijski nezavisne veličine Ui (i=1,2,3).
Znači da bi odredili sve uticaje potrebno je da znamo tri nezavisne satičke veličine X_i i tri deformacijski nezavisne veličine U_i ili manje jednih a više drugih tako da suma bude 6 nezavisnih veličina.
Ako su nam poznate samo deformacijske veličine najbolje je usvojiti veličine:

$$U_j = U_j\,(u_i,\ v_i,\ (\varphi-\varphi_T)_i,\ u_k,\ v_k,\ (\varphi-\varphi_T)_k)\ ,\quad j=1,2,...,6$$

koje su linearno nezavisne.
Ako iskoristimo veze pomjeranja i deformacijske veličine ΔL_{ik}, τ_{ik} i τ_{ki} (19) i veze (20) unesemo u te relacije, dobijamo veze između statičkih i deformacijskih nezavisnih veličina i pomjeranja i obrtanja krajeva štapa.
Usvajamo da su nezavisne veličine:
$U_1=u_i$, $U_2=v_i$, $U_3=u_k$, $U_4=v_k$, $U_5=(\varphi - \varphi_T)_i$, $U_6=(\varphi - \varphi_T)_k$
$X_1= M_i$, $X_2= M_k$, $X_3= S_{ik}$

Kada relacije:

$$N_c = S_{ik} + N_{c,o}$$

$$T_c = \frac{M_k - M_i}{L} + T_{c,o}$$

$$M_c = M_i \xi'_c + M_k \xi_c + M_{c,o}$$

ubacimo u veze:

$$\varepsilon = \frac{N}{EF} + \alpha_t t$$

$$\chi = \frac{M}{EI} + \alpha_t \frac{\Delta t}{h}$$

$$\varphi_t = \frac{kT}{GF}$$

dobija se:

$$\varepsilon = \frac{S_{ik}}{EF} + \frac{N}{EF} + \alpha_t t$$

$$\chi = \frac{M_i \xi'}{EI} + \frac{M_k \xi}{EI} + \frac{M_o}{EI} + \alpha_t \frac{\Delta t}{h}$$

$$\varphi_t = \frac{M_k}{L_{ik}} \frac{k}{GF} - \frac{M_i}{L_{ik}} \frac{k}{GF} + \frac{kT_o}{GF}$$

koje kada uvrstimo u relacije (23) dobijamo:

$$\Delta L_{ik} = S_{ik} \int_i^k \frac{dx}{EF} + \int_i^k \frac{N_o dx}{EF} + \int_i^k \alpha_t t dx$$

$$\tau_{ik} = M_i \left[\int_i^k \frac{\xi'^2}{EI} dx + \frac{k}{L_{ik}^2} \int_i^i \frac{dx}{GF} \right] + M_k \left[\int_i^k \frac{\xi' \xi}{EI} dx - \frac{k}{L_{ik}^2} \int_i^i \frac{dx}{GF} \right] + \left[\int_i^k \frac{\xi' M_o}{EI} dx - \frac{k}{L_{ik}} \int_i^i \frac{T_o dx}{GF} \right] + \int_i^k \xi' \alpha_t \frac{\Delta t}{h} dx$$

$$-\tau_{ki} = M_i \left[\int_i^k \frac{\xi' \xi}{EI} dx - \frac{k}{L_{ik}^2} \int_i^i \frac{dx}{GF} \right] + M_k \left[\int_i^k \frac{\xi^2}{EI} dx + \frac{k}{L_{ik}^2} \int_i^i \frac{dx}{GF} \right] + \left[\int_i^k \frac{\xi M_o}{EI} dx + \frac{k}{L_{ik}} \int_i^i \frac{T_o dx}{GF} \right] + \int_i^k \xi \alpha_t \frac{\Delta t}{h} dx$$

Ako uvedemo sljedeće oznake:

$$\Delta L_{ik,s} = \int_i^k \frac{dx}{EF} \qquad \Delta L_{ik,o} = \int_i^k \frac{N_o dx}{EF} \qquad \Delta L_{ik,t} = \int_i^k \alpha_t t dx$$

$$\alpha_{ik} = \int_i^k \frac{\xi'^2}{EI} dx + \frac{k}{L_{ik}^2} \int_i^i \frac{dx}{GF} \qquad \beta_{ik} = \beta_{ki} = \int_i^k \frac{\xi' \xi}{EI} dx - \frac{k}{L_{ik}^2} \int_i^i \frac{dx}{GF} \qquad \alpha_{ki} = \int_i^k \frac{\xi^2}{EI} dx + \frac{k}{L_{ik}^2} \int_i^i \frac{dx}{GF}$$

$$\alpha_{ik,o} = \int_i^k \frac{\xi' M_o}{EI} dx - \frac{k}{L_{ik}} \int_i^i \frac{T_o dx}{GF} \qquad \alpha_{ki,o} = \int_i^k \frac{\xi M_o}{EI} dx + \frac{k}{L_{ik}} \int_i^i \frac{T_o dx}{GF} \qquad \alpha_{ik,\Delta t} = \int_i^k \xi' \alpha_t \frac{\Delta t}{h} dx \qquad \alpha_{ki,\Delta t} = \int_i^k \xi \alpha_t \frac{\Delta t}{h} dx$$

dobijamo veze između statičkih i deformacijskih veličina:

$$\Delta L_{ik} = S_{ik} \Delta L_{ik,s} + \Delta L_{ik,o} + \Delta L_{ik,t}$$

$$\tau_{ik} = M_i \alpha_{ik} + M_k \beta_{ik} + \alpha_{ik,o} + \alpha_{ik,\Delta t}$$

$$-\tau_{ki} = M_k \alpha_{ki} + M_i \beta_{ki} + \alpha_{ki,o} + \alpha_{ki,\Delta t}$$

ΔL_{ik}, τ_{ik} i τ_{ki} možemo prikazati preko pomjeranja krajeva štapa i-k:

$$S_{ik} \Delta L_{ik,s} = (u_k - u_i) - \Delta L_{ik,o} - \Delta L_{ik,t}$$

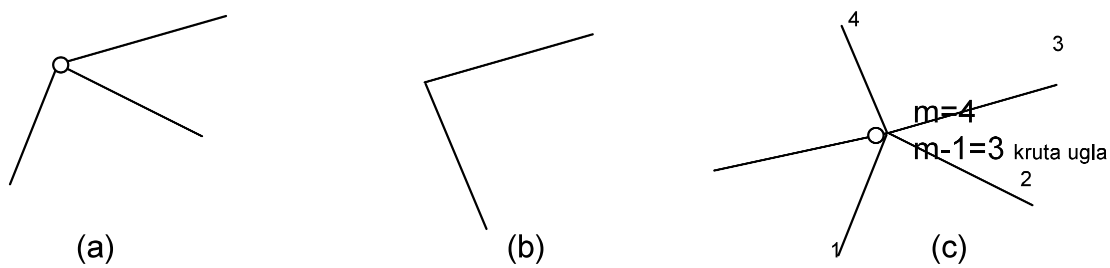
$$M_i \alpha_{ik} + M_k \beta_{ik} = (\varphi - \varphi_T)_i - \frac{v_k - v_i}{L_{ik}} - \alpha_{ik,o} - \alpha_{ik,\Delta t}$$

$$M_k \alpha_{ki} + M_i \beta_{iki} = -(\varphi - \varphi_T)_k + \frac{v_k - v_i}{L_{ik}} - \alpha_{ki,o} - \alpha_{ki,\Delta t}$$

2. OSNOVNE NEPOZNATE I OSNOVNE JEDNAČINE RAVNIH LINIJSKIH NOSAČA I NJIHOVA KLASIFIKACIJA

2.1. Elementi i čvorovi nosača

Linijski nosači sastoje se od pravih ili krivih štapova. U zavisnosti od vrste opterećenja koje primaju i prenose štapovi se dijele na proste i gredne štapove.
Prosti štapovi su pravi štapovi koji su sposobni da prime i prenesu samo sile u pravcu ose štapa.
Gredni štapovi-grede su štapovi koji su sposobni da prime i prenesu sile proizvoljnog pravca.
Ravan nosača je ravan u kojoj leže ose svih štapova ravnih linijskih nosača i jedna od glavnih centralnih osa inercije njihovih poprečnih presjeka.
Veze štapova mogu biti *zglavkaste i krute*. Zglavkasta veza je ona veza koja težištima sučeljenih presjeka ne dozvoljava da se relativno pomjeraju, dok presjeci mogu slobodno da se obrću (vidi sliku 1a).



Slika 1.

Kruta veza dva štapa, prikazana na slici 1b, sučeljenim presjecima ne dozvoljava ni relativno pomjeranje ni relativno obrtanje. *Veza u kojoj je kruto vezano m štapova sadrži m-1 krutih uglova* (Slika1c).
Prosti štapovi mogu biti vezani samo zglavkasto, dok gredni štapovi mogu biti vezane i zglavkasto i kruto.
Elemente nosača mogu biti unutrašnji i spoljašnji.
Unutrašnji elementi nosača sprečavaju relativna pomjeranja tačaka nosača. Unutrašnji elementi su *štapovi i kruti uglovi*.
Spoljašnji elementi nosača sprečavaju pomjeranja tačaka nosača u odnosu na stalne tačke. Spoljašnji elementi su *oslonci i uklještenja*.
Oslonac je konstruktivni element nosača koji oslonjenoj tački ne dozvoljava pomjeranje ili potpuno - krut oslonac, ili djelimično – elastičan – deformabilan oslonac (slika 2a.). Pravac u kome je spriječeno pomjeranje naziva se pravac oslanjanja ili pravac oslonca. Upravno na pravac oslanjanja tačka može slobodno da se pomjera. Često je jedna tačka oslonjena na dva oslonca koji formiraju nepokretno ležište(slika 2b.). Ako je tačka oslonjena na jedan oslonac tada se takav oslonac zove pokretno ležište.